PREIMO 2010 — AP

Titolo nota 18/05/2010

Problema 5 $a, b, c > 0 \qquad a+b+c=3$

$$\Longrightarrow \sum_{cyc} \frac{a+3}{3a+bc} \geq 3$$

Sol. 1 : omogeneizz. + bunching (viene !)

~~Sol. 2~~ : NO

$$12^2 = \left[\sum_c (a+3)\right]^2 = \left[\sum_c \frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{3a+bc}} \sqrt{3a+bc}\sqrt{a+3}\right]^2 \quad \text{(C.S.)}$$

$$\leq \text{Testo} \cdot \sum_c (3a+bc)(a+3)$$

$$\text{Testo} \geq \frac{144}{\sum_c (3a+bc)(a+3)} \underset{\uparrow \text{ Hope}}{\geq} 3$$

Resta da dim. che $\sum_c (3a+bc)(a+3) \leq 48$ e da qui conti...

... forse è falsa...

Sol. 3 :
$$\frac{a+3}{3a+bc} = \frac{a+3}{(a+b+c)a+bc} = \frac{a+3}{a^2+ab+ac+bc} = \frac{a+3}{(a+b)(a+c)}$$

$$\frac{a+3}{(a+b)(a+c)} + \dots = \frac{\sum_c (a+3)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3$$

$$a+3 = a+b+a+c \qquad x = a+b, \quad y = b+c, \quad z = c+a$$

$$\sum_c \frac{x+y}{xy} \geq 3 \qquad \frac{x+y+z}{6} \sum \frac{x+y}{xy} \geq 3$$

equivalente a $\sum \underbrace{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}_{\geq 2 \text{ per AM-GM}} \geq 6$

Sol. 4

$$\frac{a+3}{3a+bc} \geq \frac{a+3}{3a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} = \frac{a+3}{3a+\frac{(3-a)^2}{4}} =$$

uso $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

$$= \frac{a+3}{12a+9-6a+a^2}\cdot 4 = 4\,\frac{a+3}{(a+3)^2} = \frac{4}{a+3}$$

$$\text{Testo} = 4\sum_{cyc}\frac{1}{a+3} \geq 4\,\frac{9}{a+b+c+9} \qquad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$$

$$= 4\cdot\frac{9}{12} = 3.$$

—o—o—

$\boxed{\text{Problema 6}}$ $\quad ax^3+bx^2+cx+d = p(x)$

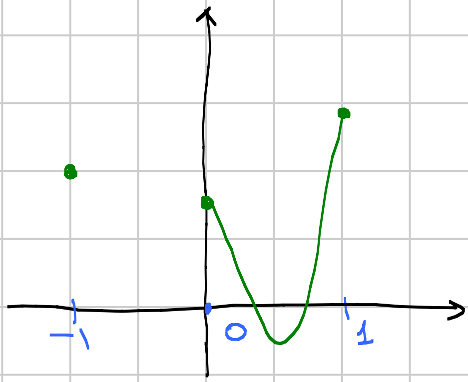
$$\min\{d,\ b+d\} > \max\{|c|,\ |a+c|\}$$

Tesi: $p(x)$ no radici in $[-1,1]$

Fatto 1: $p(0)>0$ (uso $d>0$)

$p(1)>0 \qquad a+b+c+d = b+d+a+c>0$ (uso $b+d>|a+c|$)

$p(-1)>0 \qquad b+d-(a+c)>0$



Caso 1 Suppongo esiste radici in $(0,1)$ e $a>0$

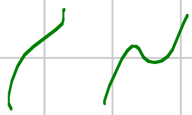
In questo caso le radici

$\alpha, \beta, -\gamma$ con $\alpha,\beta\in(0,1)$, $\gamma>1$

(perchè il prodotto è $-\frac{d}{a}<0$)

uso $d>0$

Perchè $\gamma>1$: altrimenti ci sarebbero almeno 4 radici

(oss.: le cubiche con $a>0$ sono 

$$\frac{c}{a} = \alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma \qquad \frac{d}{a} = +\alpha\beta\gamma$$

Impongo $\boxed{d>|c|}$ $\qquad \cancel{a}\alpha\beta\gamma > \cancel{a}\alpha\beta-\cancel{a}\alpha\gamma-\cancel{a}\beta\gamma$

$$\gamma(\alpha\beta+\alpha+\beta) > \alpha\beta$$

$$\alpha\beta\gamma > -\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$$

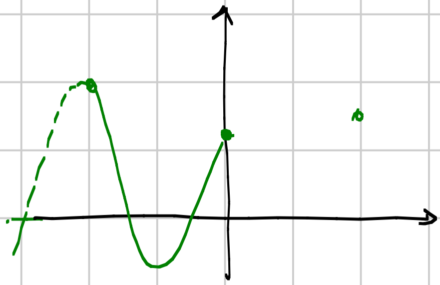
$$\alpha\beta > \gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta) \geq \alpha+\beta-\alpha\beta$$

da cui $\alpha+\beta-2\alpha\beta < 0$

$$\alpha+\beta-\alpha\beta-\alpha\beta = \alpha(1-\beta)+\beta(1-\alpha) < 0 \quad \text{assurdo.}$$

<u>Caso 2</u> $a>0$, una radice in $(-1,0)$

In questo caso per i soliti motivi le radici sono



$-\alpha, -\beta, -\gamma$ con $\alpha,\beta \in (0,1)$

$\gamma > 1$

$\frac{d}{a} = \alpha\beta\gamma \qquad d = a\alpha\beta\gamma$

$\frac{c}{a} = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$d > c \qquad \alpha\beta\gamma > \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$\alpha\beta(\gamma-1) > \gamma(\alpha+\beta)$

$\gamma > \gamma-1$

$\alpha+\beta > \alpha\beta \qquad \gamma(\alpha+\beta) > (\gamma-1)\alpha\beta$

Gli altri casi con $a<0$ sono analoghi (occhio ai segni) o ragionare con il polinomio $p(-x)$.

— o — o —

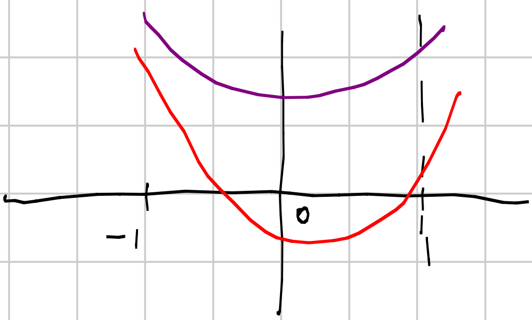
Sol. 2

tesi: $P(x) > 0$ in $[-1,1]$

$$ax^3+bx^2+cx+d > 0$$

$$bx^2+d > (-x)(ax^2+c)$$

tesi + forte: $\underbrace{bx^2+d}_{= f(x)} > \underbrace{|ax^2+c|}_{= g(x)}$



bx^2+d ha min e $|ax^2+c|$ ha max in 0 oppure 1

Controlliamo:

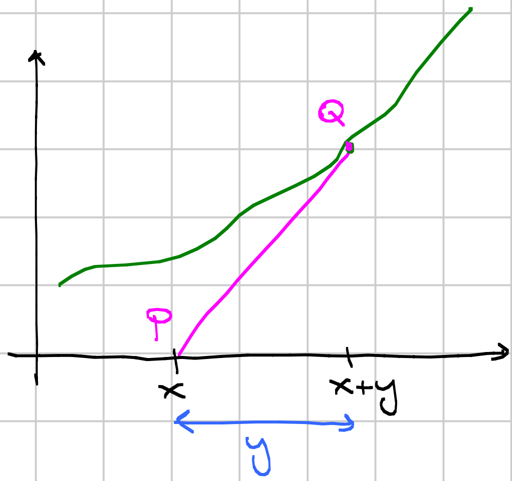
$$f(0) = d \qquad f(1) = b+d \qquad g(0) = |c| \qquad g(1) = |a+c|$$

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 7}}$ $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$

$f(x+y) \geq y\, f(f(x))$ non esistono f con questa proprietà

Idea: f dovrebbe crescere troppo !!



$$\boxed{\frac{f(x+y)}{y}} \geq f(f(x))$$

coeff. angolare retta PQ

$f(x+y)$ sta sopra una retta che passa per P e ha coeff. angolare $f(f(x))$

Lo applico con $x = 1$

$$f(y+1) \geq y\, f(f(1))$$

Questo basta per dire che $\lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty$ (Step 1)

Step 2 Voglio dim. che $f(x) > x$ per x grandi

Prendo x_0 tale che $f(f(x_0)) \geq 2$ [Step 1.5: $f(f(x)) \to +\infty$]

Allora $f(y+x_0) \geq y\, f(f(x_0)) \geq 2y$

da cui

$$f(y) \geq 2(y-x_0) > y \quad \text{per } y \text{ grandi}$$

Analogamente: $f(x) > 10x$ per x grandi

Step 3 $\quad f(\cancel{f(z)}) = f(\underbrace{f(z)-z}_{y}+\underbrace{z}_{x}) \geq (f(z)-z)\, f(\cancel{f(z)})$

$1 \geq f(z)-z \implies f(z) \leq z+1$ che è incompatibile con $f(x) > 10x$.

—o—o—

Problema 8

$$\sum \frac{a_i a_j}{a_i+a_j} = \frac{1}{4}\sum \frac{4a_i a_j}{a_i+a_j} = \frac{1}{4}\sum \frac{(a_i+a_j)^2-(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j}$$

$$= \frac{1}{4}\sum (a_i+a_j) - \frac{1}{4}\sum \frac{(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j}$$

$$= \frac{1}{4} S(n-1) - \frac{1}{4}\sum \frac{(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j} = LHS$$

$$2\sum a_i a_j = S^2 - \sum a_i^2 \qquad (1)$$

$$\sum (a_i-a_j)^2 = \sum a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j = (n-1)\sum a_i^2 - 2\sum a_i a_j$$

$$2\sum a_i a_j = (n-1)\sum a_i^2 - \sum (a_i-a_j)^2 \qquad (2)$$

$(n-1)\cdot(1) + (2)$:

$$2n\sum a_i a_j = (n-1)S^2 - \sum (a_i-a_j)^2$$

$$RHS = \frac{(n-1)S}{4} - \frac{1}{4S}\sum (a_i-a_j)^2$$

$$LHS \leq RHS \iff -\frac{1}{4}\sum \frac{(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j} \leq -\frac{1}{4S}\sum (a_i-a_j)^2$$

$$\iff \sum \frac{(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j} \geq \sum \frac{(a_i-a_j)^2}{S}$$

addendo per addendo

Sol. 2 $\sum \frac{s a_i a_j}{a_i+a_j} \overset{?}{\leq} \frac{m}{2} \sum a_i a_j$

$$\sum \frac{(a_i+a_j+s-a_i-a_j)a_i a_j}{a_i+a_j} \overset{?}{\leq} \frac{m}{2} \sum a_i a_j$$

$$\sum a_i a_j + \sum (s-a_i-a_j)\frac{a_i a_j}{a_i+a_j} \leq \frac{m}{2} \sum a_i a_j$$

$$\sum_{i<j} \sum_{k\neq i,j} \frac{a_i a_j a_k}{a_i+a_j} \leq \frac{m-2}{2} \sum_{i<j} a_i a_j$$

$$\frac{\overbrace{a_i a_j}\, a_k}{a_i+a_j} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{4}\frac{(a_i+a_j)^2}{a_i+a_j} a_k = \frac{1}{4} a_i a_k + \frac{1}{4} a_j a_k$$

GM-AM

Si tratta ora di contare i termini al LHS e al RHS, cioè ogni coppia $a_i a_j$ quante volte compare...

Sol. 3 Si nota che sostituendo a_1, a_2, a_3 con x, y, z tali che

$$a_1 + a_2 + a_3 = x + y + z$$
$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 = xy + yz + zx$$

allora RHS resta uguale

$a_1 (a_4 + \cdots)$

LEMMA ABC

posso scegliere x, y, z in modo che:

- $\sigma_1 (x,y,z) = \sigma_1 (a_1, a_2, a_3)$
- $\sigma_2 (x,y,z) = \sigma_2 (a_1, a_2, a_3)$
- $\sigma_3 (x,y,z)$ sia $>$ o $<$ di $\sigma_3 (a_1, a_2, a_3)$ (a piacimento)
- due tra x, y, z sono uguali $\longrightarrow$ oppure uno è nullo

Si verifica che LHS é "monotono nel prodotto" finale per continuitá.